particular, produces a criterion of fully starlikeness for polyharmonic functions.
Keywords: polyharmonic function, fully α–accessible function, α–accessible domain, starlike domain.

УДК 517.546.1

ОБ ИНЪЕКТИВНОСТИ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ И ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.Ф. Амозова[1], Е.Г. Ганенкова[2], С. Поннусами[3]

1 *amo-kira@rambler.ru*; Петрозаводский государственный университет
2 *g_ek@inbox.ru*; Петрозаводский государственный университет
3 *samy@isichennai.res.in*; Indian Statistical Institute, Chennai Centre SETS

В статье представлены новые критерии инъективности для полигармонических и полианалитических в круге функций.

Ключевые слова: однолистность, полигармоническая функция, полианалитическая функция.

Большое количество исследований, российских и зарубежных, посвящено условиям однолистности (инъективности) *аналитических* в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций. Одним из таких условий является следующий критерий однолистности И. Е. Базилевича в терминах коэффициентов аналитической функции.

Теорема A. [1] *Аналитическая в $\mathbb{D}$ функция $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ является однолистной тогда и только тогда, когда для каждого $z \in \mathbb{D}$ и каждого $t \in [0,\pi/2]$ справедливо*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\sin nt}{\sin t} z^{n-1} \neq 0, \quad \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)\Big|_{t=0} = n. \tag{1}$$

Для *гармонических* в $\mathbb{D}$ функций условий однолистности получено гораздо меньше (см., например, [2] и [3]).

В докладе будут представлены критерии однолистности для полигармонических и полианалитических в $\mathbb{D}$ функций, опубликованные авторами в [4], а также связанные с ними результаты.

Пусть $p \in \mathbb{N}$.

Определение. Комплекснозначная функция $F \in C^{2p}(\mathbb{D})$, называется p-гармонической (или полигармонической) в $\mathbb{D}$, если $\Delta^p F(z) = 0$ в $\mathbb{D}$, где Δ — оператор Лапласа.

Известно [5], что функция $F \in C^{2p}(\mathbb{D})$ является p–гармонической в $\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда F представима в виде

$$F(z) = \sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} F_{p-k+1}(z),$$

где каждая функция $F_{p-k+1} = h_{p-k+1} + \overline{g}_{p-k+1}$, $k = 1,\dots,p$, является гармонической в $\mathbb{D}$. Без ограничения общности можно считать, что $h_{p-k+1}(0) = 0 = g_{p-k+1}(0)$. Напомним, что каждая гармоническая функция f в $\mathbb{D}$ может быть записана в виде $f = h + \overline{g}$, где h и g — аналитические в $\mathbb{D}$ функции. Якобиан функции F обозначается J_F. Подробнее о p–гармонических функциях см., напр., [6].

Используя метод И. Е. Базилевича [1], мы получили следующую теорему.

Теорема 1. [4] *Пусть* $F(z)=\sum_{k=1}^{p}|z|^{2(k-1)}F_{p-k+1}(z)$ — *p-гармоническая в* $\mathbb{D}$ *функция, однолистная в некоторой окрестности нуля, где*

$$F_{p-k+1}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{(p-k+1)}z^n+b_n^{(p-k+1)}\overline{z}^n\right)\ \ (k=1,\dots,p)$$

— *гармонические в* $\mathbb{D}$ *функции. Тогда* $F(z)$ *однолистна в* $\mathbb{D}$ *тогда и только тогда, когда для всех* $z\in\mathbb{D}\backslash\{0\}$ *и* $t\in(0,\pi/2]$ *выполняется следующее условие*

$$\sum_{k=1}^{p}|z|^{2(k-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{(p-k+1)}z^n-b_n^{(p-k+1)}\overline{z}^n\right)\sin nt\neq 0. \qquad (2)$$

Аналогично был получен критерий однолистности для p–аналитических в $\mathbb{D}$ функций.

Определение. Для $p\in\mathbb{N}$ назовем p–аналитической (или полианалитической) функцией в $\mathbb{D}$ многочлен по переменной $\overline{z}$

$$F(z)=\sum_{k=0}^{p-1}\overline{z}^k a_k(z),$$

коэффициентами которого являются аналитические в $\mathbb{D}$ функции $\{a_k(z)\}_{k=1}^{p-1}$. Это эквивалентно тому, что $F(z)\in C^p(D)$ является решением обобщенного уравнения Коши-Римана $\partial^p F/\partial\overline{z}^p=0$ в $\mathbb{D}$ (подробнее, см. напр., [6]).

Теорема 2. [4] *Пусть* $F(z)=\sum_{k=0}^{p-1}\overline{z}^k a_k(z)$ — *p–аналитическая в* $\mathbb{D}$ *функция, однолистная в некоторой окрестности нуля, где*

$$a_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(k)}z^n,\ \ k=1,\dots,p-1,$$

— *аналитические в* $\mathbb{D}$ *функции. Тогда* $F(z)$ *однолистна в* $\mathbb{D}$ *тогда и только тогда, когда для всех* $z\in\mathbb{D}\backslash\{0\}$ *и* $t\in(0,\pi/2]$ *выполнено*

$$\sum_{k=0}^{p-1}\overline{z}^k\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(k)}\sin(n-k)t\,z^n\neq 0.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

Литература

1. Базилевич И. Е. *Проблема коэффициентов однолистных функций* // Матем. журнал МАИ. – 1945. – С. 29–47.

2. Starkov V. V. *Univalence of harmonic functions, the problem of Ponnusamy and Sairam, and constructions of univalent polynomials* // Probl. Anal. Issues Anal. – 2014. – V. 3(21). – № 2. – P. 59–73.

3. Li P., Ponnusamy S., Wang X. *Some properties of planar p−harmonic and* log-*p−harmonic mappings* // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2013. – V. 36. – № 3. – P. 595–609.

4. Amozova K. F., Ganenkova E. G., Ponnusamy S. *Criteria of univalence and fully α−accessibility for p−harmonic and p−analytic functions* // Complex Var. Elliptic Equ. – 2017. – V. 62. – № 8. – P. 1165–1183.

5. Chen Sh., Ponnusamy S., Wang X. *Bloch constant and Landau's theorem for planar p−harmonic mappings* // J. Math Anal. Appl. – 2011. – V. 373. – № 1. – P. 102–110.

6. Балк М. Б. , Зуев М. Ф. *О полианалитических функциях* // Успехи мат. наук. – 1970. – Т. 25. – Вып. 5(155). – С. 203—226.

ON INJECTIVITY OF POLYHARMONIC AND POLYANALYTIC FUNCTIONS

K.F. Amozova, E.G. Ganenkova, S. Ponnusamy

In the paper we present new univalence criteria for polyharmonic and polyanalytic functions.

Keywords: univalence, polyharmonic function, polyanalytic function.

УДК 517.518

О Λ-СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Н.Ю. Антонов[1]

1 *nikolai.antonov@imm.uran.ru*; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Рассматривается один вид сходимости (Λ-сходимость) двойных тригонометрических рядов Фурье, промежуточный между сходимостью по квадратам и λ-сходимостью при λ > 1. Известный результат о сходимости почти всюду по квадратам рядов Фурье функций из класса $L(\ln^+ L)^2 \ln^+\ln^+\ln^+ L([0,2\pi)^2)$ *распространен на случай Λ-сходимости для некоторых последовательностей Λ.*

Ключевые слова: двойные тригонометрические ряды Фурье, сходимость почти всюду.

Пусть $d \in \mathbb{N}$; $\mathbb{T}^d = [0,2\pi)^d$ — d-мерный тор; $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — неубывающая функция; $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ — множество определенных на $\mathbb{T}^d$ комплекснозначных функций f, для которых функция $\varphi(|f|)$ суммируема на $\mathbb{T}^d$; $C(\mathbb{T}^d)$ — множество функций, непрерывных на $\mathbb{T}^d$. Для $f \in L(\mathbb{T}^d)$ и вектора $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_d)$ с неотрицательными целочисленными координатами через $S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x})$ будем обозначать значение $\mathbf{n}$-й прямоугольной частичной суммы кратного тригонометрического ряда Фурье функции f в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$.

Пусть $\lambda \geq 1$. Говорят, что ряд Фурье функции f λ-сходится в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$, если существует предел

$$\lim_{\min\{n_i : 1\le i\le d\}\to\infty} S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x}), \qquad (1)$$

рассматриваемый только по тем векторам $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_d)$, для которых

$$\frac{1}{\lambda} \le \frac{n_i}{n_j} \le \lambda, \qquad 1 \le i, j \le d.$$